364. 有理型函數論ニ於ケル函數 $m(r,a)$ ニ就イテ

角谷静夫(阪大)

$m(r,a)$ ハ最初 R. Nevanlinna ニヨツテ

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}\,d\varphi$$

ト定義サレタガ Ahlfors ハ

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{[f(re^{i\varphi}),a]}\,d\varphi \tag{1}$$

但シ $[a,b]=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}$

ト定義シタ方ガ種々ノ計算ニ便利デアルコトヲ示シタ。

$[a,b]$ ハ a,b ノ定義サレテヰル Gauss 平面ニ原点 O ニ於テ切スル半径 $\frac{1}{2}$ ノ球面 Σ ヲ考ヘルトキ、コノ Σ ノ上ヘ例ノ如ク a,b ヲ大々射影シテ得ラレル点（コレモ誤解ノオソレガナイトキハ a,b デ表ハス）ヲ結ブ弦ノ長サヲ表ハスカラ $m(r,a)$ ハ Σ ノ上ヘ total 1 ノ mass ヲアル方法デ分布シタトキノ logarithmic potential ト考ヘルコトガ出来ル。シカモコノ mass ハ $|z|=r$ ノ $f(z)$ ニヨル写像 L_r（コレモ Σ ノ上デ考ヘル）ノ上ニ分布サレテヰル。コノ分布ヲ集合函数 $\mu_r(E)$[1] デ表ハセバ

$$m(r,a)=\int_{\Sigma}\log\frac{1}{[w,a]}d\mu_r(w)=\int_{L_r}\log\frac{1}{[w,a]}d\mu_r(w) \quad\text{-----}(2)$$

トナル。$\mu_r(E)$ ハ $f(re^{i\varphi})\in E$ ナル φ ノ集合（$0\leqq\varphi<2\pi$ ニアルモノ）ヲ E_φ トスルトキ $\frac{1}{2\pi}m(E_\varphi)$ ニ等シイ。

$m(r,a)$ ヲ此ノ如ク考ヘレバ $m(r,a)$ ニ関スル $f(z)$ ノ種々ノ性質ノ意味ガ明瞭ニナル。一例トシテ defect ヲ考ヘル。

$f(z)$ ヲ $|z|<R$ $(R\leqq\infty)$ ニテ定義サレタ有理型函数トシ

$$\delta_N(a)=\varliminf_{r\to R}\frac{m(r,a)}{T(r)}$$

---

1) $\mu_r(E)$ ハ Borel ノ集合デ定義サレテヰル。

ト置ケバ $\lim_{r\to R} T(r)=\infty$ ナルトキハ $\delta_N(a)>0$ ナル点 a ノ集合 E_N ハ capacity[2] ガ 0 デアル。

Frostman ハコレヲ R. Nevanlinna ノ第一定理ヲ用ヒテ証明シテキル[3] ガ實ハコノ定理ノ証明ニハ第一定理從ッテ $N(r, a)$ ノ性質ハ必要デナイ。シカモ $f(z)$ ガ有理型デアルト云フコトモ少シモ必要デナイ。(2) ニヨッテ與ヘラレル potential トシテノ $m(r, a)$ ノ定義ダケガコノ結果ヲ與ヘルノデアル。

更ニ次ノ定理ガ成立スル。

---

2) 集合 E ノ capacity C_E ハ次ノ如ク定義サレル。

total 1 ノ mass ヲ E ノ上ニ分布シテ (コノ分布ヲ集合函数 μ ニテ表ハス) Potential $u_\mu(a)=\int_E \log\frac{1}{[w,a]}\,d\mu(w)$ ノ a ノ変化ニ對スル上限ヲ $M_\mu(E)$ トシ、此ノ如キアラユル μ ニ関スル $M_\mu(E)$ ノ下限ヲ V_E トスルトキ、$C_E=e^{-V_E}$ トオク。$C_E=0$ ト云フノハ $V_E=+\infty$ ナルコトデアル。即チ如何ナル μ ニ對シテモ $M_\mu(E)=\infty$ トナル。

3) Frostman: Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion (Åttonde skandinaviska Matematikerkongressen i Stockholm, (1934)

Frostman: Potential d'équilibre et capacité des Ensembles (Thèse, Lund. 1935).

定理　$|z|<R$ ニテ定義サレタ任意ノ函数 $f(z)$ ニ對シテ $m(r,a)$ ヲ (1) ニヨツテ定義スル。[4] 然ルトキハ $0<r<R$ ニテ定義サレタ $\lambda(r)\geqq 0$，$\lim_{r\to R}\lambda(r)=\infty$ ナル任意ノ函数 $\lambda(r)$ ニ對シテ

$$\varliminf_{r\to R}\bigl(m(r,a)-\lambda(r)\bigr)>0$$

ナル点 a ノ集合 E_λ ハ capacity 0 デアル。[5]

証明：　任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $C_{E_\lambda}\leqq\varepsilon$ ナルコトヲ示セバヨイ。

$r_n\uparrow R$ ヲ $\lambda(r_n)>2^n\log\frac{1}{\varepsilon}$ ニヨツテ定義シ、$m(r_n,a)>2^n\log\frac{1}{\varepsilon}$ ナル点 a ノ集合ヲ E_n ニテ表ハセバ (3) 及ビ E_λ ノ定義ヨリ

---

4)　$f(z)$ ハ $m(r,a)$ ガ定義サレル如キ函数（$m(r,a)=+\infty$ トナル a ガ存在シテモヨイ）デナケレバナラナイガ，有理型デアルコトハ勿論、連続デアルコトスラ必要デナイ！

5)　コノ定理ハ Ahlfors ノ定理ヲ精密ニシタモノデアル。

Ahlfors: Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. phys-math. soc. Sci. Fenn. 5 (1931)

及ビ

清水先生：輓近函數論 145頁 參照。

$$E_\lambda \subset E_1 + E_2 + \cdots\cdots + E_n + \cdots\cdots \equiv \overline{E}_\lambda \tag{4}$$

デアル。故ニ $C_{\overline{E}_\lambda} \leqq \varepsilon$ ナルコト、即チ $V_{\overline{E}_\lambda} \geqq \log \frac{1}{\varepsilon}$ ナルコトヲ示セバヨイ。

$V_{\overline{E}_\lambda}$ ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon' > 0$ ニ對シテ total 1 ノ mass ノ $\overline{E}_\lambda$ ヘノ分布 μ ガ存在シテ

$$V_{\overline{E}_\lambda} + \varepsilon' > \underset{a \in \Sigma}{O.G} \int_{\overline{E}_\lambda} \log \frac{1}{[w, a]} \, d\mu(w)$$

$$\geqq \underset{a \in \Sigma}{O.G} \int_{E_n} \log \frac{1}{[w, a]} \, d\mu(w).$$

トナル。$\mu(E_n) = m_n$ ト置ケバ $\frac{\mu}{m_n}$ ハ E_n ノ上ダケデ考ヘレバ total 1 ノ mass ノ E_n ヘノ分布デアルカラ

$$V_{\overline{E}_\lambda} + \varepsilon' > m_n \cdot \underset{a \in \Sigma}{O.G} \int_{E_n} \log \frac{1}{[w, a]} \, d\left(\frac{\mu(w)}{m_n}\right)$$

$$\geqq m_n \cdot V_{E_n}.$$

故ニ

$$\frac{1}{V_{E_n}} \geqq \frac{m_n}{V_{\overline{E}_\lambda} + \varepsilon'}$$

(4) ヨリ $\sum_{n=1}^{\infty} m_n \geqq 1$ デアルカラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{E_n}} \geqq \frac{1}{V_{\overline{E}_\lambda} + \varepsilon'}$$

$\varepsilon' > 0$ ハ任意デアッタカラ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{V_{E_n}}\geqq\frac{1}{V_{E_\lambda}} \tag{5}$$

次ニ各々ノ V_{E_n} ヲ評價スル。V_{E_n} ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon''>0$ ニ對シテ total 1 ノ mass ノ E_n ヘノ分布 μ_n ガ存在シテ

$$\underset{a\in\Sigma}{\mathrm{O.G}}\int_{E_n}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\mu_n(w)<V_{E_n}+\varepsilon''$$

トナル。トコロガ一方 $m(r,a)$ ノ定義 (2) 及ビ r_n ノ定メ方ヨリ、$a\in E_n$ ニ對シテハ

$$2^n\log\frac{1}{\varepsilon}<\int_{\Sigma}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\mu_{r_n}(w)$$

デアルカラ、兩邊ニ $\int_{E_n}d\mu_n(a)$ ヲホドコスト

$$2^n\log\frac{1}{\varepsilon}<\int_{E_n}d\mu_n(a)\int_{\Sigma}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\mu_{r_n}(w)$$

$$=\int_{\Sigma}d\mu_{r_n}(w)\int_{E_n}\log\frac{1}{[a,w]}\,d\mu_n(a)$$

$$<\left(V_{E_n}+\varepsilon''\right)\int_{\Sigma}d\mu_{r_n}(w)=V_{E_n}+\varepsilon''$$

$\varepsilon''>0$ ハ任意デアツタカラ

$$2^n\log\frac{1}{\varepsilon}\leqq V_{E_n},\qquad \frac{1}{V_{E_n}}\leqq\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

コレト (5) ヨリ

$$\frac{1}{\nabla_{E_\lambda}} \leqq \frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \quad 又ハ \quad \nabla_{E_\lambda} \geqq \log\frac{1}{\varepsilon}$$

ヲ得ル。（証明終）

コノ定理ヲ基本ニスレバ $m(r, a)$ ガアル程度ノ増加率ヲ示ス如キ点 a ノ集合ニ関スル定理ガ得ラレル。